*Лекция №1*

***Числовые ряды.***

*Определение:*

Возьмём последовательность и построим по ней ещё одну последовательность

Пара последовательностей (, ) называется *числовым рядом* и обозначается

– общий член ряда, n-й член ряда

– k-я частичная сумма ряда

*Определение:*

Число S называется суммой ряда:

*Утверждение:*

Пусть Тогда:

*Доказательство:*

Для конечных сумм верно тождество:

При предельном переходе k получаем:

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Теорема (необходимый признак сходимости ряда):*

*Доказательство:*

*Примеры:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

следующее равенство:

При предельном переходе по k получаем:

откуда и получаем утверждение, так как первое слагаемое в правой части – число.

*Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда):*

*Доказательство:*

***Знакопостоянные ряды.***

*Определение:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Теорема (признак сравнения, признак Вейерштрасса):*

*Доказательство:*

*Следствие (признак сравнения в предельной форме):*

*Доказательство:*

*Примеры:*

*Лекция №2*

*Теорема (признак Д’Аламбера):*

*Доказательство:*

*Следствие (признак Д’Аламбера в предельной форме):*

*Доказательство:*

*Теорема (признак Коши):*

*Доказательство:*

*Следствие (признак Коши в предельной форме):*

*Доказательство:*

*Теорема (интегральный признак Коши):*

*Доказательство:*

*Примеры:*

*Теорема (признак Куммера):*

*Доказательство:*

*Теорема (признак Гаусса):*

*Доказательство:*

*Комментарий к признаку Куммера:*

*Лекция №3*

***Знакопеременные ряды.***

*Определение:*

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

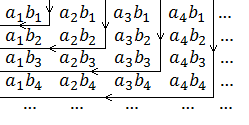
*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

**

*Определение:*

*Теорема (признак Лейбница):*

*Доказательство:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Лекция №4*

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Замечание:*

*Теорема (Римана):*

*Доказательство:*

*Теорема (признаки Абеля и Дирихле):*

*Доказательство:*

*Признак Абеля:*

*Признак Дирихле:*

***Суммирование расходящихся рядов.***

*Теорема (Чезаро):*

*Доказательство:*

*Обозначение:*

*Пример:*

*Лекция №5*

***Функциональные последовательности.***

*Определение:*

*Примеры:*

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Следствие:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема (признак Вейерштрасса для последовательностей):*

*Доказательство:*

*Лекция №6*

***Функциональные ряды.***

*Определение:*

*Определение:*

*Определение:*

*Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):*

*Доказательство:*

*Следствие (необходимый признак Коши):*

*Доказательство:*

*Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов):*

*Доказательство:*

*Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов):*

*Доказательство:*

*Признак Абеля:*

*Признак Дирихле:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Лекция №7*

***Степенные ряды.***

*Определение:*

*Замечание:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Следствие:*

*Определение:*

*Теорема (формула Коши-Адамара):*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Замечание:*

*Теорема (ряд Тейлора):*

*Доказательство:*

*Определение:*

*Замечание:*

*Теорема (Абеля):*

*Доказательство:*

*Замечание:*

*Определение:*

*Пример:*

*Лекция №8*

***Бесконечные произведения.***

*Определение:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Комментарий:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Замечание:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Определение:*

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Лекция №9*

***Разложение синуса в бесконечное произведение.***

*Лемма 1:*

*Доказательство:*

*Лемма 2:*

*Доказательство:*

*Теорема (о разложении синуса в бесконечное произведение):*

*Доказательство:*

*Следствие (формула Валлиса):*

*Доказательство:*

*Лекция №10*

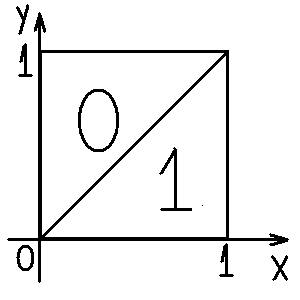
***Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра.***

*Определение:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Пример интеграла с параметром:*

**

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Лекция №11*

*Теорема (об интегрировании с параметром):*

*Доказательство:*

***Несобственные интегралы, зависящие от параметра.***

*Определение:*

*Определение:*

*Замечание:*

*Теорема (критерий Коши):*

*Доказательство:*

*Примеры:*

*Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром):*

*Доказательство:*

*Пример:*

*Лекция №12*

*Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром):*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Лекция №13*

*Теорема (Дини о последовательности):*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Следствие:*

*Доказательство:*

*Теорема (интеграл Дирихле):*

*Доказательство:*

*Лекция №14*

***Эйлеровы интегралы.***

*Определение:*

*Теорема (основное функциональное равенство для гамма-функции):*

*Доказательство:*

*Замечание:*

*Теорема (первый интеграл Эйлера):*

*Доказательство:*

*Теорема (формула дополнения для гамма-функции):*

*Доказательство:*

*Следствие (интеграл Эйлера-Пуассона):*

*Доказательство:*

*Лекция №15*

*Определение (второй интеграл Эйлера):*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Теорема (связь бета и гамма-функций):*

*Доказательство:*

*Пример:*

*Теорема (формула Стирлинга):*

*Доказательство:*

*Лекция №16*

***Ряды Фурье.***

*Определение:*

*Лемма (ортогональность тригонометрической системы):*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Определение:*

*Замечание:*

*Доказательство:*

*Теорема (минимальное свойство коэффициентов Фурье):*

*Доказательство:*

*Следствие 1 (неравенство Бесселя):*

*Доказательство:*

*Следствие 2:*

*Доказательство:*

*Определение:*

*Лемма:*

*Доказательство:*

*Лекция №17*

*Рассуждение:*

*Утверждение:*

*Доказательство:*

*Теорема (принцип локализации Римана):*

*Доказательство:*

*Теорема (признак Дини):*

*Доказательство:*

*Следствие:*

*Доказательство:*

*Лекция №18*

*Теорема (достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке):*

*Доказательство:*

*Следствие (достаточное условие дифференцируемости ряда Фурье):*

*Теорема (об интегрировании рядов Фурье):*

*Доказательство:*

*Лекция №19*

*Примеры:*

*Лекция №20*

***Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.***

*Определение:*

*Лемма (свойства ядра Фейера):*

*Доказательство:*

*Теорема (Фейера):*

*Доказательство:*

*.*

***Дополнительные сведения о показательной и тригонометрических функциях.***

***Приближение непрерывных функций многочленами.***

*Теорема (Вейерштрасса):*

*Доказательство:*

*Лекция №21*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Пример:*

*Доказательство:*

*Теорема (Римана):*

*Доказательство:*

*Лекция №22*

***Преобразование Фурье.***

*Определение:*

*Лемма:*

*Доказательство:*

*Теорема:*

*Доказательство:*

*Следствие:*

*Доказательство:*